B

DURÉE : 4 heures

PRÉLIMINAIRES

Les trois questions sont indépendantes
Indifféremment e^x et $\exp x$ désignent l'exponentielle de base e de x.

1. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall t \geqslant 0 \quad \forall n$ entier strictement positif

$$\int_0^t g(s) \left\{ \int_0^s g(u)\, du \right\}^n ds = \frac{1}{n+1} \left\{ \int_0^t g(s)\, ds \right\}^{n+1}.$$

(On pourra dériver chacun des deux membres considéré comme fonction de la variable t.)

2. Soient f, g, u trois fonctions continues, définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall t \geqslant 0 \qquad u(t) \leqslant f(t) + g(t) \int_0^t u(s)\, ds.$$

On désigne par $v(t)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$v(t) = \int_0^t u(s)\, ds,$$

et par w la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$w(t) = v(t) \exp\left[-\int_0^t g(s)\, ds. \right]$$

a. Montrer que $v'(t) \leqslant f(t) + v(t)\, g(t)$.

b. On suppose que $\forall t \geqslant 0 \qquad g(t) = a$.

Montrer que $w'(t) \leqslant e^{-at} f(t)$.

En déduire

$$w(t) \leqslant \int_0^t e^{-as} f(s)\, ds$$

et

$$v(t) \leqslant \int_0^t f(s)\, e^{a(t-s)}\, ds.$$

c. g étant quelconque, montrer que

$$w'(t) \leqslant f(t) \exp\left[-\int_0^t g(s)\, ds \right]$$

puis que

$$v(t) \leqslant \int_0^t f(s) \left\{ \exp \int_s^t g(x)\, dx \right\} ds.$$

d. Trouver les fonctions u, continues, ne prenant que des valeurs positives ou nulles telles que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad u(t) \leqslant g(t) \int_0^t u(s)\, ds.$$

Tournez la page S. V. P.

3. Soient u et Φ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

On considère la fonction U définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} U(t) = \int_0^t u(t-s)\,\Phi(s)\,ds & \forall\, t > 0 \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

a. On suppose que u et Φ sont à valeurs positives ou nulles.

En écrivant, pour $t' > t$

$$U(t') - U(t) = \int_0^t \{\, u(t'-s) - u(t-s)\,\}\,\Phi(s)\,ds + \int_t^{t'} u(t'-s)\,\Phi(s)\,ds$$

montrer que si u est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors U est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer la continuité de U au point $t = 0$.

Soit $t_0 > 0$ et $t \in [t_0, 2t_0]$.

On pose

$$M = \text{Sup}\,\{\,|\,u(t)\,|\,;\quad t \in [0, 2t_0]\,\}$$
$$M^* = \text{Sup}\,\{\,|\,\Phi(t)\,|\,;\quad t \in [0, 2t_0]\,\}.$$

Montrer que $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \alpha > 0$ tel que

$$|\,t - t_0\,| < \alpha \Rightarrow |\,U(t) - U(t_0)\,| \leqslant \varepsilon\, t_0\, M^* + (t - t_0)\, MM^*.$$

(On pourra utiliser l'uniforme continuité de u.)

En déduire que U est continue à droite au point t_0.

Montrer la continuité de U sur $\mathbb{R}^+$.

NOTATIONS

Dans tout le problème, f désigne une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \geqslant 0, \qquad |\,f(t)\,| \leqslant c\,;$$

Φ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

On note g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall\, t \geqslant 0 \qquad \forall\, s \leqslant t \qquad |\,\Phi(s)\,| \leqslant g(t).$$

On considère l'équation (E)

(E) $$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-s)\,\Phi(s)\,ds \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Vérifier que (E) peut s'écrire

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(s)\,\Phi(t-s)\,ds \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Résoudre le problème (E) consiste à trouver une fonction u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

(1) u est **continue.**

(2) u vérifie (E).

PARTIE I. — *Étude de quelques exemples*

1. Soit l'équation (E_1) correspondant à (E) avec $f(t) = 5 \cos t$ et $\Phi(s) = s$.

a. Montrer que si u continue vérifie (E_1), u est deux fois différentiable et vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.

b. Soit u continue vérifiant (E_1). Calculer $u(0)$ et $u'(0)$.

c. Résoudre le problème (E_1).

2 *a.* Soit (E_2') correspondant à (E) avec $f(t) = 1$ et $\Phi(s) = a\, e^{-s}$ où a est une constante strictement positive.
Résoudre le problème (E_2').
Quel est le comportement de la solution continue de (E_2') au voisinage de $+\infty$?

b. Soit (E_2) correspondant à (E) avec $f(t) = t\, e^{-t}$ et $\Phi(s) = e^{-s}$.
Résoudre le problème (E_2).

3. Soit (E_3) correspondant à (E) avec $f(t) = 0$ et $\Phi(s) = \sin s$.
Résoudre le problème (E_3).

PARTIE II. — *On étudie dans cette partie l'existence et l'unicité des solutions continues de* (E)

1. Soient u_1 et u_2 deux solutions continues de (E).
Montrer que

$$\forall\, t \geqslant 0 \qquad |\, u_1(t) - u_2(t)\,| \leqslant g(t) \int_0^t |\, u_1(s) - u_2(s)\,|\, ds.$$

En déduire que

$$\forall\, t \geqslant 0 \qquad u_1(t) = u_2(t).$$

Retrouver ainsi la solution continue de (E_3).

2. On construit la suite de fonctions $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$u_0(t) = f(t)$$

$$u_n(t) = f(t) + \int_0^t u_{n-1}(t - s)\, \Phi(s)\, ds.$$

a. Montrer que les fonctions u_n sont continues.
Soit f monotone croissante positive et Φ positive; montrer que u_n est une fonction monotone croissante, ceci pour tout entier n.

b. Soit $t_0 > 0$.
Vérifier que $\forall\, t \in [0, t_0] \quad |\, u_1(t) - u_0(t)\,| \leqslant c\, g(t)\, t_0$.
Montrer que

$$\forall\, t \geqslant 0 \qquad |\, u_{n+1}(t) - u_n(t)\,| \leqslant g(t) \int_0^t |\, u_n(s) - u_{n-1}(s)\,|\, ds$$

puis que

$$\forall\, t \in [0, t_0] \quad |\, u_{n+1}(t) - u_n(t)\,| \leqslant c\, t_0\, \frac{g(t)}{n!} \left\{ \int_0^t g(s)\, ds \right\}^n.$$

Tournez la page S. V. P.

(On utilisera la question 1 des préliminaires.)

c. Soit $v_n(t) = u_{n+1}(t) - u_n(t)$.

Montrer que la *série* de terme général $v_n(t)$ converge absolument, pour tout $t \geqslant 0$.

Montrer que la *suite* de terme général $u_n(t)$ converge pour tout $t \geqslant 0$ vers une limite que l'on notera $u(t)$

d. Montrer que

$$\forall\, t \in [0,\ t_0] \qquad |\, u(t) - u_n(t)\,| \leqslant c\, t_0\, g(t) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \quad \text{où} \quad \alpha = \int_0^{t_0} g(t)\, dt.$$

En déduire que l'on peut résoudre le problème (E).

Partie III

1. Soit l'équation (E'), cas particulier de (E) :

$$(E') \qquad u(t) = 1 + \int_0^t u(t - s)\, \Phi(s)\, ds \qquad \forall\, t \geqslant 0$$

où Φ est positive et $0 < \int_0^{\infty} \Phi(s)\, ds = b < 1$.

a. On construit (comme en II. 2) la suite de fonctions $(u_n)_{n \geqslant 0}$

$$u_0(t) = 1$$

$$u_n(t) = 1 + \int_0^t u_{n-1}(t - s)\, \Phi(s)\, ds.$$

Montrer que $\forall\, n \geqslant 0$ u_n est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Soit a_n la suite définie par $a_0 = 1$

$$a_{n+1} = 1 + b a_n.$$

Déterminer explicitement la suite a_n et montrer qu'elle converge.

Soit $v_n = \sup_{t \geqslant 0} |\, u_n(t)\,|$. Montrer que $v_{n+1} \leqslant 1 + b\, v_n$, que $v_n \leqslant a_n$ et que la suite v_n est majorée.

En déduire que la solution continue de (E') est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que u, solution continue de (E') est monotone croissante.

En déduire que $\lim_{t \to \infty} u(t)$ existe. On note $u(\infty)$ cette limite.

Montrer que $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, A > 0$ tel que

$$t > A \Rightarrow \left| \int_0^t u(t - s)\, \Phi(s)\, ds - b\, u(\infty) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^A \{\, u(\infty) - u(t - s)\,\}\, \Phi(s)\, ds.$$

En déduire que la limite de $\int_0^t u(t - s)\, \Phi(s)\, ds$ lorsque $t \to \infty$ est $b\, u(\infty)$.

Exprimer $u(\infty)$ en fonction de b. Vérifier les résultats trouvés sur l'équation (E'_2).

2. On reprend le cas général de l'équation (E) et on suppose qu'il existe a, c_1 et c_2 tels que

$$\forall\, t \geqslant 0 \qquad |\, f(t)\,| \leqslant c_1\, e^{at}, \qquad \int_0^{\infty} |\, \Phi(t)\,|\, e^{-at}\, dt = c_2 < 1.$$

Soit $v(t) = \sup_{s \leqslant t} |\, u(s)\, e^{-as}\,|$.

Montrer que $v(t) \leqslant c_1 + c_2 v(t)$.

En déduire que, si u est une solution continue de (E)

$$|\, u(t)\,| \leqslant \frac{c_1 e^{at}}{1 - c_2}.$$

Vérifier ce résultat sur l'équation (E_1).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail